Analysis

Keine Ahnung von Symmetrie

Datei Nr. 41212

Der ausführliche Text steht in der Datei 41211

Stand: 19. Dezember 2020

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

1. Die Grundsymmetrien

Für einfache Aufgaben (z.B. auf Grundkurs-Niveau) wird meist nur die Untersuchung der **Symmetrie zur y-Achse oder zum Ursprung** verlangt. Hier wendet man folgende Methode an:

Untersuchung der Grundsymmetrien

Berechne $f(-x)$ = …

Gilt dann für alle $x \in D$:

(1) $f(-x) = f(x)$, dann ist K **symmetrisch zur y-Achse.**

(2) $f(-x) = -f(x)$, dann ist K **symmetrisch zum Ursprung.**

Gilt weder (1) noch (2), dann liegt keine dieser beiden Symmetriearten vor.

Dies heißt dann aber nicht, dass K nicht symmetrisch ist. Man sollte dann nicht schreiben „Es liegt keine Symmetrie vor“, sondern „Es ist keine *(solche)* Symmetrie erkennbar“.

Beispiel 1: $f(x) = \frac{2}{7}x^4 - \frac{16}{7}x^2 + 2$

Symmetrieprüfung: $f(-x) = \frac{2}{7}(-x)^4 - \frac{16}{7}(-x)^2 + 2 = \frac{2}{7}x^4 - \frac{16}{7}x^2 + 2 \boxed{= f(x)}$

Ergebnis: Das Schaubild dieser Funktion ist symmetrisch zur y-Achse.

MERKE: Wenn eine ganzrationale oder gebrochen-rationale Funktion nur Exponenten mit ***geraden Zahlen*** hat, dann ist das Schaubild dieser Funktion symmetrisch zur y-Achse.

Beispiel 2: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 2x$

Symmetrieprüfung: $f(-x) = \frac{1}{4}(-x)^3 - 2(-x) = -\frac{1}{4}x^3 + 2x \boxed{= -f(x)}$

Ergebnis: Das Schaubild dieser Funktion ist symmetrisch zum Ursprung.

MERKE: Wenn eine ganzrationale Funktion nur Exponenten mit ***ungeraden Zahlen*** hat, dann ist das Schaubild dieser Funktion symmetrisch zum Ursprung.

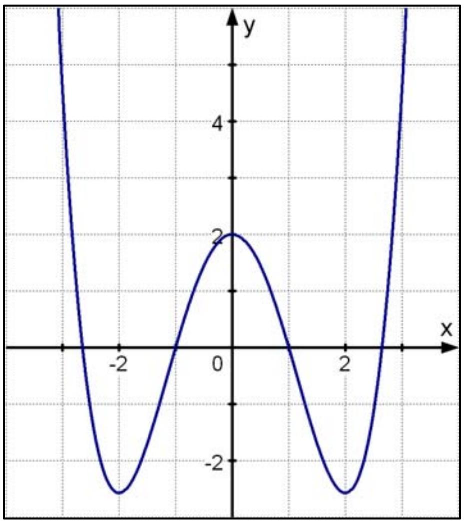
Beispiel 3: $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x - 3$

Wir überprüfen: $f(-x) = -\frac{1}{3}(-x)^3 + 4(-x) - 3 = \frac{1}{3}x^3 - 4x - 3 \boxed{\neq \pm f(x)}$

Erg.: Dies stimmt weder mit f(x) noch mit f(-x) überein. Also ist auf so keine Symmetrie erkennbar.

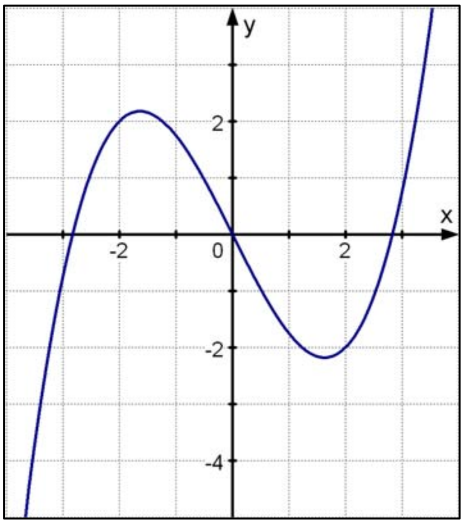
Nun die Schaubilder dazu:

Schaubilder dazu:



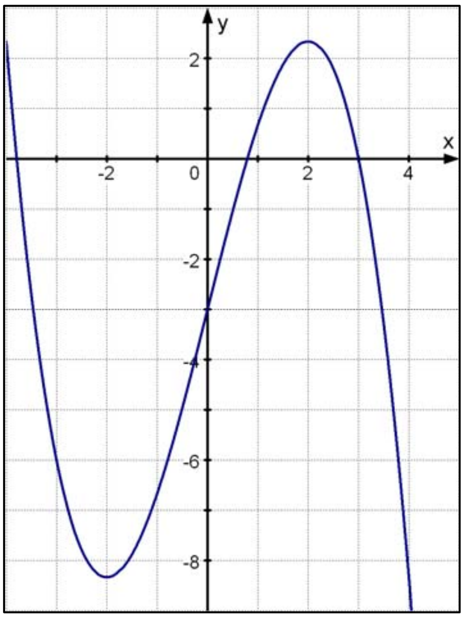
$y = \frac{2}{7}x^4 - \frac{16}{7}x^2 + 2$

Symmetrie zur y-Achse



$y = \frac{1}{4}x^3 - 2x$

Punktsymmetrie zum Ursprung



$y = -\frac{1}{3}x^3 + 4x - 3$

Keine Symmetrie zur y-Achse und keine zum Ursprung,

(Aber K ist eine punktsymmetrisch

Zum Wendepunkt $W(0 \mid -3)$.)

2. Symmetrie zu einer Geraden x = c

Wenn für alle h > 0 gilt $f(c-h)=f(c+h)$,
dann ist das Schaubild K der Funktion f symmetrisch zur Geraden x = c.

Beispiel: Gegeben ist f durch $f(x)=\frac{x^2+4x+8}{x^2+4x}$.
Zeige, dass ihr Schaubild K symmetrisch zur Geraden x = 2 ist.

Zu zeigen ist: Für alle h > 0 gilt $f(-2-h)=f(-2+h)$.

Symmetrienachweis:

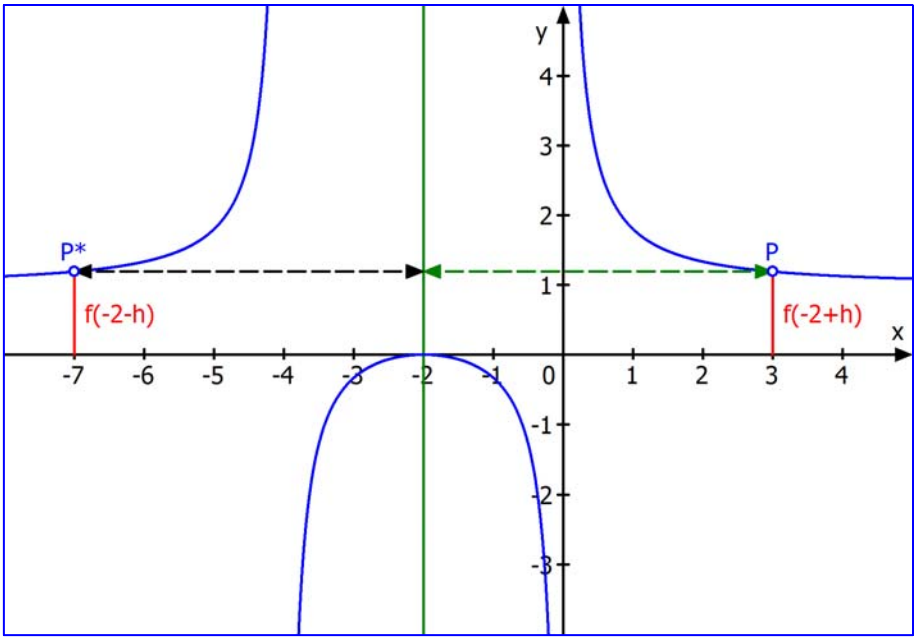
$$f(-2-h)=\frac{(-2-h)^2+4(-2-h)+8}{(-2-h)^2+4(-2-h)}=\frac{4+4h+h^2-8-4h+8}{4+4h+h^2-8-4h}=\frac{h^2+4}{h^2-4}$$

$$f(-2+h)=\frac{(-2+h)^2+4(-2+h)+8}{(-2+h)^2+4(-2+h)}=\frac{4-4h+h^2-8+4h+8}{4-4h+h^2-8+4h}=\frac{h^2+4}{h^2-4}$$

Also gilt $f(-2-h)=f(-2+h)$ d.h.

K ist symmetrisch zur Geraden mit der Gleichung x = - 2.

Zur Abbildung: Für P und P* ist h= 5.



3. Symmetrie zu einem Punkt Z(a I b)

Es sei Z (a I b) das vermutete Symmetriezentrum von K.

Wenn $\frac{f(a+h)+f(a-h)}{2}=b$ ist, dann ist K punktsymmetrisch zu Z

(Mittelpunktsbedingung für Z)

Die **Begründung der Formel** $\frac{f(a+h)+f(a-h)}{2}=b$ ist einfach:

Geht man von der „Symmetriestelle“ a aus um eine Strecke h >0 nach rechts zu a + h und um h nach links zu a – h kommt man zu den Kurvenpunkten $P\left(a+h\,|\,f(a+h)\right)$ und $P^*\left(a-h\,|\,f(a-h)\right)$.

Die x-Koordinaten hat man also symmetrisch zu a gewählt.

Damit Punktsymmetrie vorliegt, muss Z der Mittelpunkt von P und P* sein und umgekehrt.

Dann muss man überprüfen, ob das für die y-Koordinaten auch gilt: $\frac{y_P+y_{P^*}}{2}=b$

Beispiel: Zeige, dass das Schaubild von $f(x)=\frac{x-1}{x-2}$ punktsymmetrisch zu $Z(2\,|\,1)$ ist.

Lösung:

$$\frac{f(2+h)+f(2-h)}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{2+h-1}{2+h-2}+\frac{2-h-1}{2-h-2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1+h}{h}+\frac{1-h}{-h}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1+h-1+h}{h}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2h}{h}=1=y_Z$$

Bemerkung: Man hätte auch $f(2+h)+f(2-h)=2$ beweisen können.

Ergebnis: K: $y=\frac{x-1}{x-2}$ ist punktsymmetrisch zu $Z(2\,|\,1)$.